Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАКЛЮЧИТЕЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

МАТЕМАТИКА

8 и 9 классы

Задание 1 (10 баллов)

Длины сторон *AB, BC, CD* и *DA* выпуклого четырехугольника *ABCD* равны соответственно 5, 17, 5 и 9. Найдите длину диагонали *DB*, если известно, что она является целым числом.

Задание 2 (10 баллов)

Найдите знаменатель дроби $\frac{100!}{28^{20}}$ после ее сокращения до несократимой.

(Выражение 100! равно произведению первых 100 натуральных чисел: $100! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 100$.)

Задание 3 (12 баллов)

Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ такова, что $a_{2n} = \frac{1}{a_{2n-1}}$, а $a_{2n+1} = 1 - a_{2n}$. Найдите a_1, если $a_{2018} = 2$.

Задание 4 (12 баллов)

Турнир по стрельбе предполагает несколько серий по 10 выстрелов каждая. В одной из серий Иван выбил 82 очка, в результате чего среднее количество очков, выбиваемых им за серию, увеличилось с 75 до 76 очков. Сколько очков должен выбить Иван в следующей серии выстрелов, чтобы среднее количество очков, выбитых за серию, стало равно 77?

Задание 5. (12 баллов)

Уравнение $x^2 + ax + b + 1 = 0$ имеет два различных ненулевых целочисленных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ не является простым, если числа a и b целые?

Задание 6 (14 баллов)

По регламенту шахматного турнира каждый участник должен сыграть с каждым один раз. После того как было сыграно ровно 99 партий, оказалось, что множество участников турнира можно разбить на две неравные по численности группы так, что все соперники, относящиеся к одной и той же группе, уже сыграли партии между собой. При этом были сыграны, но не более четырех, партии между соперниками, которые относятся к разным группам. Каково наибольшее возможное число участников этого шахматного турнира?

Задание 7 (14 баллов)

В компании работает 168 человек. Среди любых четырех человек можно выбрать хотя бы одного, знакомого с остальными тремя. Каково минимальное возможное количество людей, которые знакомы со всеми?

Задача 8 (16 баллов)

Вова играл старыми костяшками от домино, на которых стерлись все точки, так что они стали не отличимыми. Каждая костяшка представляет собой прямоугольник 2×1, а их число равно 24. Вова решил каждый день по-новому раскладывать костяшки в виде дорожки 2×12, так чтобы рисунок раскладки никогда не повторялся. Сколько дней Вова сможет так раскладывать костяшки, пока все возможные раскладки не будут исчерпаны, если в день он делает одну раскладку?

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАКЛЮЧИТЕЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

МАТЕМАТИКА

10 класс

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных по весу гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2018 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$ либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2017}x_{2018}$, если известно, что она является целым числом.

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+|x+1|+\text{K}+|x+2022|$.

Задача 4. (12 баллов)

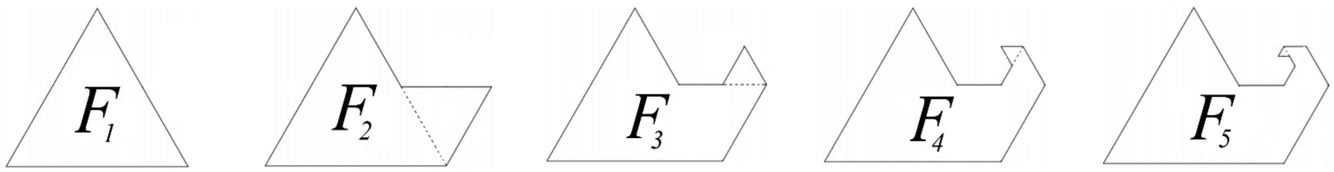
Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50^{\circ}$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^{\circ}$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников F_1, F_2, F_3, F_4K Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{2}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.



Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Задача 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 2031$.

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАКЛЮЧИТЕЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

МАТЕМАТИКА

11 класс

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$?

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| \mathrm{K} + 11|x-10|$

Задание 3. (12 баллов)

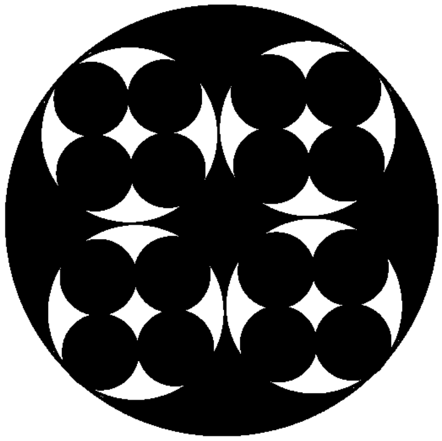
Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 1$, если $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$?

Задание 4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

Задача 5. (12 баллов)

На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются четыре новые внутренне касающиеся ее окружности равных радиусов. Эти четыре окружности внешне касаются друг друга. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



Задание 6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a + b$.

Задание 7 (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху к положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 1%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Задача 8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А, Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный
(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?